

۱. حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 4) / (x - 2)]$$

۲. مشتق تابع $f(x) = (3x^2 + 2x) / (x + 1)$ را پیدا کنید.

۳. نقطه بحرانی تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ را پیدا کرده و نوع آن را مشخص کنید (نقطه مینیمم، ماکسیمم یا نقطه عطف)

۴. مساحت ناحیه بین منحنی‌های $y = x^2$ و $y = x$ در بازه $[0, 1]$ را حساب کنید.

۵. مقدار انتگرال معین زیر را محاسبه کنید:

$$\int_1^2 [x * \ln(x)] dx$$

۶. مقدار مشتق دوم تابع $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ را بیابید.

۷. تابع $f(x) = e^{(-x^2)}$ را بررسی کرده و مشخص کنید که آیا مشتق پذیر است؟ اگر بله، مشتق آن را بنویسید.

۸. فرض کنید تابع $f(x)$ پیوسته باشد و $\int_1^4 f(x) dx = 9$ و $\int_1^2 f(x) dx = 2$) مقدار $\int_2^4 f(x) dx$ را بیابید.

۹. تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ را بررسی کرده و مشتق آن را به دست آورید.

۱۰. مقدار حد زیر را بیابید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(\sin(3x)) / x]$$

پاسخ سوال ۱:

حد زیر را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 4) / (x - 2)]$$

صورت را تجزیه می کنیم:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$\Rightarrow [(x - 2)(x + 2)] / (x - 2)$$

با ساده سازی، عبارت برابر با $x + 2$ می شود.

بنابراین:

$$\lim = 2 + 2 = 4$$

پاسخ سوال ۲:

$$f(x) = (3x^2 + 2x) / (x + 1)$$

برای مشتق، از قاعده تقسیم استفاده می کنیم:

$$f'(x) = [(6x + 2)(x + 1) - (3x^2 + 2x)(1)] / (x + 1)^2$$

پس از ساده سازی:

$$\text{صورت} = (x^2 + 6x + 2x + 2) - (3x^2 + 2x) \cdot 1$$

$$= 6x^2 + 8x + 2 - 3x^2 - 2x = 3x^2 + 6x + 2$$

بنابراین:

$$f'(x) = (3x^2 + 6x + 2) / (x + 1)^2$$

پاسخ سوال ۳:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$\text{مشتق اول} : f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

ریشه های $f'(x)$ را پیدا می کنیم:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$$

نقاط بحرانی $x = 1$ و $x = 3$

مشتق دوم $f''(x) = 6x - 12$

در $x = 1 \rightarrow f'(1) = -6$ نقطه ماکسیمم

در $x = 3 \rightarrow f'(3) = 6$ نقطه مینیمم

پاسخ سوال ۴:

تابع بالایی $y = x$:

تابع پایینی $y = x^2$:

محدوده $x \in [0, 1]$:

مساحت $= \int_0^1 (x - x^2) dx$ تا 0 تا 1

$$= [0.5x^2 - (1/3)x^3]_0^1$$

$$= 0.5 - 1/3 = 1/6$$

پاسخ: مساحت برابر $1/6$ واحد مربع است.

پاسخ سوال ۵:

$$\int_1^2 [x * \ln(x)] dx$$

روش جز به جز:

$$u = \ln(x) \rightarrow du = 1/x dx$$

$$dv = x dx \rightarrow v = (1/2)x^2$$

$$\text{انتگرال} = \int_1^2 x^2 \ln(x) - (1/4)x^2 \ln(x) - (1/4)x^2$$

$$= (1/2)x^2 \ln(x) - (1/4)x^2$$

ارزیابی بین ۱ و ۲:

$$x=2 \rightarrow (1/2)(4)\ln(2) - (1/4)(4) = 2\ln(2) - 1$$

$$x=1 \rightarrow (1/2)(1)\ln(1) - (1/4)(1) = 0 - 0.25$$

$$\ln(2) - 1] - (-0.25) = 2\ln(2) - 0.75$$

نتیجه: $2\ln(2) - 0.75$

پاسخ: $\ln(2) - 0.75$

پاسخ سوال ۶:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$\text{مشتق اول } f'(x) = (2x) / (x^2 + 1)$$

مشتق دوم:

$$\begin{aligned} f''(x) &= [(2)(x^2 + 1) - (2x)(2x)] / (x^2 + 1)^2 \\ &= [2x^2 + 2 - 4x^2] / (x^2 + 1)^2 \\ &= (-2x^2 + 2) / (x^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

پاسخ سوال ۷:

$$f(x) = e^{(-x^2)}$$

مشتق پذیر است چون تابع ترکیب مشتق پذیرهاست.

$$f'(x) = e^{(-x^2)} \times (-2x) = -2x * e^{(-x^2)}$$

پاسخ سوال ۸:

$$\int_1^9 f(x) dx = 9$$

$$\int_1^9 f(x) dx = 3$$

با استفاده از خاصیت جمع:

$$\int_2^9 f(x) dx = 9 - 3 = 6 \quad \text{إتا 6}$$

پاسخ سوال ۹:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$$

$$: f'(x) = (1/2)(x^2 + 1)^{-1/2} \times 2x = x / \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{مشتق}$$

پاسخ سوال ۱۰:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} [(\sin(3x)) / x] \\ &= 3 \times \lim_{x \rightarrow 0} [\sin(3x)/(3x)] = 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$